

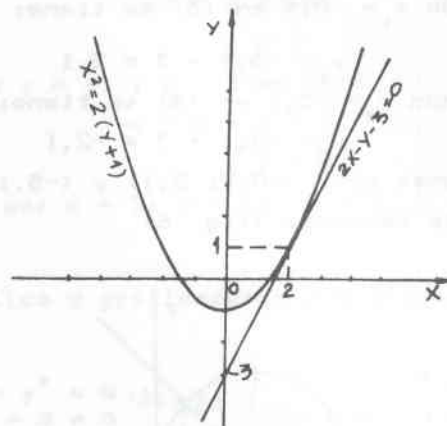


Fig. 7

$$c) \begin{cases} x^2 = 4y & (1) \\ 2y^2 = x & (2) \end{cases}$$

Como en la ecuación (2) la variable x está despejada, sustituimos (2) en (1):

$$(2y^2)^2 = 4y$$

$$4y^4 = 4y$$

$$y^4 - y = 0$$

$$y(y^3 - 1) = 0$$

$$y_1 = 0 \quad y^3 - 1 = 0$$

$$y_2 = 1$$

Sustituyendo $y_1 = 0$ en (2) se tiene: $x_1 = 0$

Sustituyendo $y_2 = 1$ en (2) se tiene: $x_2 = 2$

Luego, las soluciones son: $(0, 0)$ y $(2, 1)$

Gráficamente tenemos (fig. 8):

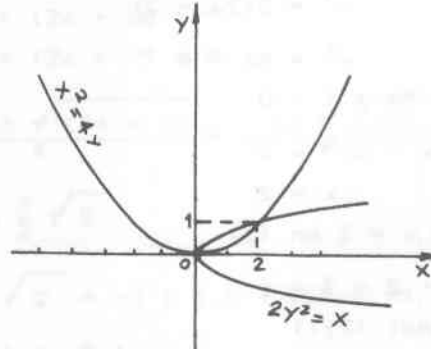


Fig. 8

Ejercicios (epígrafe 4)

1. Determina el par ordenado (x; y) que satisface los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$a) \begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 4x + y = 9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + 2y = 13 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 9x + 20y = 33 \\ 8x + 15y = 21 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 10x - 10y = 19 \\ 4x + 5y = 22 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} 0,3x - y = 0 \\ 0,5x + 0,4y = 12,4 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 0,2x + 0,3y = 8 \\ 0,5x - 0,4y = -3 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x + y = -16 \\ 7x = -6 - y \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3x - 20 = -y \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} 6x + 2(y + 3) = 0 \\ 3(x + y) = -11 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 4,25 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} x = \frac{3}{2}y - 9 \\ y = \frac{3}{4}x + 3 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 5 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} \frac{2x}{3} + y = 16 \\ x + y = 14 \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} \frac{x}{9} + \frac{y}{7} = 10 \\ \frac{x}{3} + y = 50 \end{cases}$$

$$ñ) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0 \\ 2(x - 3) - y = 10 \end{cases}$$

$$o) \begin{cases} \frac{x - y}{3} = x - 4 \\ \frac{x + y}{2} = x - y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$p) \begin{cases} 5(x - 3) = 4x - 2(y + 3) \\ \frac{y}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} \end{cases}$$

$$q) \begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{3} = \frac{1}{6} \\ 2(x + y) - 3y = 7 \end{cases}$$

$$r) \begin{cases} \frac{3x - 2y}{3} - \frac{x - y}{2} = 2 \\ 2(x + y) - 3(x - y) = 10 \end{cases}$$

$$s) \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 18 \\ \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = -5 \end{cases}$$

$$t) \begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{y}{4} = 1 \\ \frac{6}{x} + \frac{y}{6} = \frac{11}{3} \end{cases}$$

$$u) \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{5y} = 4,2 \\ \frac{9}{2x} - \frac{6}{y} = 2,5 \end{cases}$$

$$v) \begin{cases} \frac{1}{x + y} - \frac{1}{x - y} = 2 \\ \frac{\frac{1}{x + y}}{3} + \frac{\frac{1}{x - y}}{4} = 7 \end{cases}$$

2. Resuelve los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 15 \\ x - y + z = 5 \\ x - y - z = -9 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 6x + y + 2z = 4 \\ x - 10y - 2z = 7 \\ 5x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + 2y + 2z = 11 \\ 2x + y + z = 7 \\ 3x + 4y + z = 14 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x + 3y + 4z = 14 \\ x + 2y + z = 7 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x + 4y - z = 6 \\ 2x + 5y - 7z = -9 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 3x - 4y = 6z - 16 \\ 4x - y = z + 5 \\ 3y + 2(z - 1) = x \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} 6x + 2y - 5z = 13 \\ 3x + 3y - 2z = 13 \\ 7x + 5y - 3z = 26 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{3} = 3 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{2} = 13 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 0 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x + \frac{1}{2}(y + z) = 5 \\ y + \frac{1}{2}(x + z) = 5 \\ z + \frac{1}{2}(x + y) = 5 \end{cases}$$

3. Determina el conjunto solución de los siguientes sistemas:

$$a) \begin{cases} x^2 = 12y \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y - x = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y^2 - x^2 = 8 \\ y - 3x = 0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} y^2 = 2x + 1 \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} (y - 1)^2 = 8(x - 2) \\ y - x = 1 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x^2 + y = 2 \\ y^2 + x = 2 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} y^2 = 4(x - 1) \\ y + 2 = 2x \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 41 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \\ y - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y + 1 = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$$

$$l) \begin{cases} \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{9} = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$$m) \begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{5y^2}{9} = 1 \\ y = 3 - x \end{cases}$$

$$n) \begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1 \\ 4x - 5y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \text{n)} \begin{cases} \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{81} = 1 \\ y = \frac{9}{10}x - 9 \end{cases} & \text{o)} \begin{cases} \frac{3(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = 3 - \frac{1}{2}x \end{cases} \\ \text{p)} \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x + y = b \end{cases} & \text{q)} \begin{cases} x^3 - y^3 = 98 \\ x - y = 2 \end{cases} \\ \text{r)} \begin{cases} x = 2y - 5 \\ x^2 + y^2 = 2x + y \end{cases} & \text{s)} \begin{cases} 2x^2 - 3y = 23 \\ 3y^2 - 8x = 59 \end{cases} \end{array}$$

4. Determina, si existen, los puntos de intersección de las siguientes curvas dadas por sus ecuaciones. Identifica en cada caso dichas curvas (punto 27 del Memento).

a) $2x - 8 = y + 2$
 $x = 2y + 8$

b) $x^2 = 4(y - 1)$
 $2x - y = 2$

c) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 16$
 $x - 2y - 5 = 0$

d) $16x^2 + 25y^2 = 400$
 $y = x - 5$

e) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$
 $2y = x - 2$

f) $4x + 3y = 7$
 $3x - 4 = 10 - x - 3y$

g) $(y - 2)^2 = x - 2$
 $(y - 2)^2 = x$

h) $4(x - 3)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$
 $2x + 3y - 6 = 0$

5. Calcula los vértices del triángulo cuyos lados están dados por las ecuaciones.

a) $4x - 3y + 12 = 0$; $5x + y - 4 = 0$; $x + 4y + 3 = 0$

b) $x - 3y + 4 = 0$; $3x - y - 4 = 0$; $x + y = 0$

c) $5y = 4x + 20$; $y - 4 = -2x$; $y = 0$

d) $2x + 7y = 29$; $x - 4y + 8 = 0$; $x + y = 2$

e) $y - 2 = 0$; $5x + 8y + 20 = 0$; $x = 4$

f) $y = 6x$; $x + y = 7$; $x - 6y = 0$

6. Determina la relación de posición entre las rectas dadas por sus ecuaciones sin resolver el sistema.

a) $2x + 5y = 3$; $3x - 5y - 4 = 0$

b) $12x - 9y - 6 = 0$; $-4x + 3y - 6 = 0$

c) $6x - 3y = 4$; $18x - 9y = 12$

d) $0,5x + 0,3y = 2$; $0,15x + 0,09y = 4$

e) $14x - 8y = 6$; $2x + 2y = 3$

f) $-4x + 5y - 3 = 0$; $8x - 10y = -6$

g) $3x + 7y - 21 = 0$; $-x + y - 7 = 0$

- h) $2x + 5y = 9$; $-4x - 10y + 3 = 0$
 i) $x + y + 4 = 0$; $0,5x + 0,5y = -2$
7. Verifica si se cortan o no en un mismo punto las tres rectas en cada caso:
- a) $2x + 3y - 1 = 0$; $4x - 5y + 5 = 0$; $3x - y + 2 = 0$
 b) $3x - y + 3 = 0$; $5x + 3y - 7 = 0$; $x - 2y - 4 = 0$
 c) $2x - y + 1 = 0$; $x + 2y - 17 = 0$; $x + 2y - 3 = 0$
8. Determina para qué valores de a y b las dos rectas
- 1) $ax - 2y - 1 = 0$; $6x - 4y - b = 0$
 2) $ax + 8y + b = 0$; $2x + ay - 1 = 0$
- a) tienen un punto común
 b) son paralelas
 c) son coincidentes
9. ¿Cuál es la función del tipo $f(x) = ax^2 + bx + b$ para la cual $f(1) = 4$ y $f(-1) = b$.
10. Halla la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ definida en el intervalo $[-1;3]$, si conoces que en los extremos del intervalo toma el valor máximo 8, y $f(1) = 4$ es su valor mínimo.
11. El perímetro de un rectángulo es 28 cm. Si el duplo del lado mayor es igual al lado menor aumentado en 10, halla la longitud de los lados.
12. Se desea conocer las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que si aumenta el lado mayor en 4 m y el menor disminuye en 2 m, el área del rectángulo aumenta en 8 m^2 , mientras que si el lado mayor aumentara en 2 m y el menor disminuyera en 4 m, el área del rectángulo disminuiría en 48 m^2 .
13. Si al numerador de una fracción se resta 1, el valor de la fracción es $\frac{1}{3}$; y si al denominador se resta 2, el valor de la fracción es $\frac{1}{2}$. Halla la fracción.
14. Dos bolsas tienen 200 bolas. Si de la bolsa que tiene más bolas se sacan 15 y se echan en la otra, ambas tendrán la misma cantidad de bolas. ¿Cuántas tiene cada bolsa?
15. Cierta número de personas alquiló un ómnibus para una

excursión. Si hubieran ido 10 personas más, cada una habría pagado 5 pesos menos, y si hubieran ido 6 personas menos, cada una habría pagado 5 pesos más. ¿Cuántas personas iban en la excursión y cuánto pagó cada una?

16. Un número está compuesto por tres cifras cuya suma es el doble de la cifra de las decenas. La cifra de las centenas es $\frac{1}{2}$ de la de las unidades, y cuando se invierte el orden de sucesión de las cifras el número aumenta en 198. ¿De qué número se trata?
17. Tres cooperativas, A, B y C, están situadas formando triángulo. Para ir de A a B, pasando por C, se recorren 27 km ; el recorrido de B a C, pasando por A, es de 29 km, y el de C a A, pasando por B, es de 32 km . ¿Qué distancia hay entre cada dos cooperativas?
18. De un triángulo se conoce que la suma del mayor de sus ángulos con el mediano es 135° y la suma del mediano y el menor es 110° . Halla la amplitud de los ángulos del triángulo.
19. La suma de los valores absolutos de las tres cifras de un número es 14. La cifra de las decenas es igual a la suma de las cifras de las centenas y las unidades. Si del número se resta 99 se obtiene otro número que se compone de las mismas cifras pero en orden inverso, ¿cuál es el número original?
20. Si del triplo de un número se resta el doble de otro, el resultado es 5; pero si se suma el duplo del segundo número al cuádruplo del primero, la suma es 9. ¿Cuáles son los números?
21. La suma de los cuadrados de las cifras de un número de dos cifras es igual a 10. Si del número buscado sustraemos 18, obtenemos un número escrito con esas mismas cifras pero de orden inverso. Halla el número.
22. Un rectángulo tiene 18 m de perímetro y 20 m^2 de superficie. Determina las dimensiones del mismo.
23. Determina los coeficientes a, b y c de modo que el trinomio $ax^2 + bx + c$ se anule al hacer $x = 3$ y $x = 2$, y

- tome valor 12 para $x = 0$.
24. Si dividimos un número de dos cifras por la suma de estas, en el cociente obtenemos 7 y en el resto 6. Si ese mismo número de dos cifras se divide por el producto de sus cifras, en el cociente obtendremos 3 y el resto es un número igual a la suma de sus cifras. Halla el número.
 25. La suma de dos números de dos cifras, escritos con cifras iguales pero de orden inverso es igual a 77. Halla dichos números si la suma de los cuadrados de sus cifras es 29.
 26. ¿Qué valores deben tomar los coeficientes a y c en la ecuación $y = ax^2 + c$ que representa una función de segundo grado, para que la gráfica de dicha función pase por los puntos $M(-1; -3)$ y $P(3; 0)$?
 27. La diferencia de dos números es a su producto como $1 : 24$ y la suma de estos números es a su diferencia como $5 : 1$. Halla estos números.
 28. La suma de dos números de tres cifras, escritos con cifras iguales pero en orden inverso, es igual a 1252. Halla dichos números si la suma de sus cifras es igual a 14 y la suma de los cuadrados de ellas es 84.

5. Resolución de inecuaciones

A las desigualdades con variables en grados anteriores las hemos denominado inecuaciones.

Las inecuaciones del tipo $ax + b \leq 0$ ó $ax + b \geq 0$ con $a \neq 0$ se denominan lineales en una variable y se resuelven de forma análoga a las ecuaciones lineales, pero teniendo en cuenta que cuando se multiplica o divide en ambos miembros por un número negativo, el signo de la desigualdad se invierte.

Ejemplo 1

Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente las soluciones:

a) $5x - 2 \geq \frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2} - 3x > 4$

c) $(2x + 5)(x - 1) \leq 2x(x - 6) + 10$

Resolución

a) $5x - 2 \geq \frac{1}{2}$

La solución gráfica es: (fig. 9)

$$5x \geq \frac{1}{2} + 2$$

$$5x \geq \frac{5}{2}$$

$$x \geq \frac{1}{2}$$

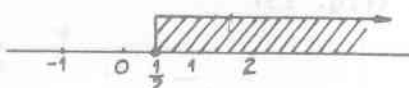


Fig. 9

b) $-\frac{1}{2} - 3x > 4$

La solución gráfica es: (fig. 10)

$$-3x > 4 + \frac{1}{2}$$

$$-3x > \frac{9}{2}$$

$$x < -\frac{3}{2}$$

se invierte el
signo de la desi-
gualdad pues $-3 < 0$

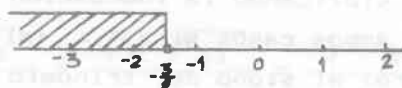


Fig. 10

c) $(2x + 5)(x - 1) \leq 2x(x - 6) + 10$

$$2x^2 + 3x - 5 \leq 2x^2 - 12x + 10$$

$$15x \leq 15$$

$$x \leq 1$$

La solución gráfica es: (fig. 11)

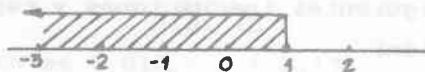


Fig. 11

Las inecuaciones del tipo

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{ó} \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

con $a \neq 0$ se denominan cuadráticas y se resuelven descomponiendo en factores el trinomio $ax^2 + bx + c$ (que es equivalente a buscar sus ceros reales resolviendo la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$) y analizando el signo de ese trinomio en los intervalos determinados por los ceros.

Para determinar las soluciones debes tener en cuenta que si x_1 y x_2 ($x_1 < x_2$) son ceros, entonces:

- Si $a > 0$, para los valores de x comprendidos entre los ceros el signo del trinomio es negativo y para los que están fuera de ese intervalo, el signo del trinomio es positivo (fig. 12)

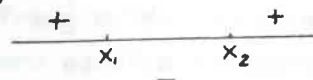


Fig. 12

- Si $a < 0$, el comportamiento es inverso al del caso anterior. (fig. 13)

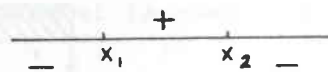


Fig. 13

Nota: En casos como este, podemos reducirlo al primero multiplicando la inecuación por -1 .

En ambos casos si $x_1 = x_2$ (el discriminante del trinomio es cero) el signo del trinomio es mayor o igual que cero si $a > 0$ y menor o igual que cero si $a < 0$.

Si el trinomio no tiene descomposición en factores reales (el discriminante es menor que cero) su signo es constante e igual al signo de a y la solución es, todos los $x \in \mathbb{R}$ si la desigualdad dada coincide con el signo del trinomio o el conjunto vacío si es el contrario.

Ejemplo 2

Resuelve las siguientes inecuaciones y representa gráficamente la solución:

- a) $x(x + 3) \geq 5x + 3$ b) $4(x^2 + 3) - 8x < 10x$
 c) $x(x - 6) + 10 > 1$ d) $3x(x - 2) - (x - 6) < 23(x - 3)$
 e) $x(x + 2) > -(7 + x)$

Resolución

En todos los casos al transformar se obtiene una ecuación cuadrática.

$$\begin{aligned} \text{a) } x(x + 3) &\geq 5x + 3 \\ x^2 + 3x &\geq 5x + 3 \\ x^2 - 2x - 3 &\geq 0 \end{aligned} \quad \text{Es una inecuación cuadrática.}$$

$$(x - 3)(x + 1) \geq 0$$

Los ceros del trinomio son:

$$x - 3 = 0 \quad x + 1 = 0$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

Los signos del trinomio y la representación gráfica de las soluciones se representan en la figura 14,

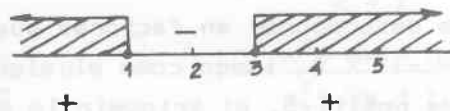


Fig. 14

luego la solución es: $x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$

b) $4(x^2 + 3) - 8x < 10x$

$$4x^2 + 12 - 18x < 0$$

$$4x^2 - 18x + 12 < 0$$

$$2x^2 - 9x + 6 < 0$$

Para hallar los ceros del trinomio $2x^2 - 9x + 6$ apliquemos la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 48}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{4} = \frac{9 \pm 5,74}{4}$$

$$x_1 = \frac{9 + 5,74}{4} = 3,19$$

$$x_2 = \frac{9 - 5,74}{4} = 0,815$$

Los signos del trinomio y la representación gráfica de las soluciones se representan en la figura 15

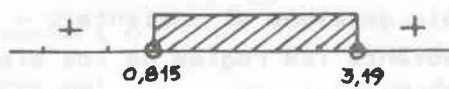


Fig. 15

luego, la solución es $0,815 < x < 3,19$

c) $x(x - 6) + 10 > 1$

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

$$(x - 3)^2 > 0$$

Este trinomio es positivo para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

d) $3x(x - 2) - (x - 6) < 23(x - 3)$

$$3x^2 - 6x - x + 6 < 23x - 69$$

$$3x^2 - 30x + 75 < 0$$

$$x^2 - 10x + 25 < 0$$

$$(x - 5)^2 < 0$$

Este trinomio es no negativo para todo $x \in \mathbb{R}$, luego la